Compito di algebra lineare del 8 settembre 2016

Istruzioni: I fogli per svolgere gli esercizi vi saranno forniti. Consegnate solo la bella e il foglio con gli esercizi e motivate sempre le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrice, cellulari, pena l'annullamento del compito.

Esercizio 1.

(a) Enuncia il teorema di Cayley–Hamilton.

(b) Sia A una matrice 3×3 triangolare superiore a coefficienti complessi tale che $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^2) = 0$. Dimostra che $A^3 = \det A \cdot I$, dove I è la matrice identità 3×3.

Esercizio 2. Considera la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia $M(2)$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 e sia $T \colon M(2) \to M(2)$ l'endomorfismo definito nel modo seguente:

$$T(X) = AX - XA.$$

(a) Calcola la dimensione dell'immagine di T.

(b) L'endomorfismo T è diagonalizzabile? Motiva la risposta.

(c) Dimostra che per qualsiasi altra scelta della matrice A iniziale la dimensione dell'immagine di T è sempre minore o uguale a 3.

(d) Dimostra che per qualsiasi altra scelta della matrice A iniziale la dimensione dell'immagine di T è sempre minore o uguale a 2.

Esercizio 3. Sia U il piano di $\mathbb{R}^3$ definito da $x+y+z=0$ e sia V il piano di $\mathbb{R}^3$ definito da $x+2y-z=0$. Si considerino le riflessioni r_U e r_V di $\mathbb{R}^3$ rispetto ai piani U e V. Sia $T = p_U \circ p_V$.

(a) Mostra che T è una rotazione intorno ad un asse.

(b) Determina l'asse di T e il coseno dell'angolo di rotazione.

Esercizio 4. Sia g il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ definito da

$$g(x, y) = {}^{t}xSy$$

con

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determina una base ortogonale per g.

(b) Esiste una base formata da due vettori isotropi? Motiva la risposta.

(c) Determina una applicazione lineare $T \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che sia una isometria rispetto al prodotto scalare g e tale che 2 sia un autovalore per T.

(d) È vero che qualsiasi isometria per g è diagonalizzabile? Motiva la risposta.

Soluzioni

Esercizio 1.

(a) Se $p(t)$ è il polinomio caratteristico di A, allora $p(A) = 0$.

(b) La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} a & ? & ? \\ 0 & b & ? \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

e quindi

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ? & ? \\ 0 & b^2 & ? \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è

$$p(t) = (a-t)(b-t)(c-t) = -t^3 + (a+b+c)t^2 - (ab+bc+ca)t + abc.$$

Dalle ipotesi segue che $a+b+c=0$ e $a^2+b^2+c^2=0$ e quindi

$$0 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

implica che anche $ab + bc + ca = 0$. Allora il polinomio caratteristico è semplicemente $p(t) = -t^3 + \det A$. Dal teorema di Cayley-Hamilton deduciamo che $p(A) = 0$ e quindi $-A^3 + \det A \cdot I = 0$.

Esercizio 2. La matrice associata a T nella base canonica di $M(2)$ è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) La dimensione è il rango di B, cioè due.
(b) Il polinomio caratteristico di B è $p(t) = t^2(t+1)(t-1)$. L'autovalore 0 ha molteplicità geometrica due, quindi B è diagonalizzabile. Quindi T è diagonalizzabile.
(c) La matrice I appartiene al nucleo di T, perché $T(I) = A - A = 0$. Quindi il nucleo di T ha dimensione almeno uno, e allora l'immagine ha dimensione al massimo 3 per il teorema della dimensione.
(d) Anche la matrice A appartiene al nucleo di T, perché $T(A) = A^2 - A^2 = 0$. Se A e I sono indipendenti, concludiamo che il nucleo ha dimensione almeno 2 e quindi l'immagine ha dimensione al massimo 2. Se sono dipendenti, allora $A = kI$ per qualche $k \in \mathbb{R}$ e deduciamo che $T(X) = kA - kA = 0$ per ogni X e quindi l'immagine ha dimensione zero.
(c'-d') Per risolvere i punti (c) e (d), è anche possibile scrivere la matrice A come

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e dedurre che la matrice associata B è

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha rango minore o uguale a due: l'ultima colonna è chiaramente multiplo della prima, e le prime tre colonne A^1, A^2, A^3 sono dipendenti tramite la relazione

$$(a-d)A^1 + bA^2 + cA^3.$$

Esercizio 3. Le matrici che rappresentano r_U e r_V rispetto alla base canonica sono

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'isometria T è rappresentata dal prodotto di queste matrici

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -4 & -7 \\ -8 & -1 & -4 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo che i conti sono giusti controllando che questa sia una matrice ortogonale.

(a) Il prodotto di due riflessioni è una matrice ortogonale con determinante positivo e quindi è una rotazione intorno ad un asse per un teorema fatto a lezione.
(b) Cerchiamo un autovettore di A con autovalore 1 e troviamo che l'asse è generato dal vettore

$$v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, possiamo notare che l'intersezione $r = U \cap V$ è fissata da T e quindi è l'asse della rotazione. Si verifica che r è generata dal vettore v descritto sopra. L'angolo θ di rotazione è tale che $2\cos\theta + 1 = \operatorname{tr} A = -\frac{1}{9}$. Quindi $\cos\theta = -\frac{5}{9}$.

Esercizio 4.

(a) Prendiamo il vettore $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e determiniamo l'ortogonale

$$v_1^{\perp} = \{x + 2y = 0\}.$$

In particolare $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è ortogonale a v_1 e quindi v_1, v_2 formano una base ortogonale.

(b) I vettori isotropi sono tutti i vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tali che

$$x^2 + 4xy + y^2 = 0.$$

Per trovare delle soluzioni si può ad esempio imporre $x = 1$ e trovare y. In particolare i vettori seguenti sono isotropi ed indipendenti e quindi formano una base:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(c) Nella base w_1, w_2 il prodotto scalare si scrive come la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Usiamo d'ora in poi questa base perché è più comoda. Consideriamo un endomorfismo diagonale, del tipo

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Notiamo che

$$^{t}MAM = -6 \begin{pmatrix} 0 & ab \\ ab & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi M definisce una isometria se e solo se $ab = 1$. Prendendo a=2 e $b = \frac{1}{2}$ otteniamo una isometria con autovalore 2.

(d) I vettori isotropi formano due rette $\mathrm{Span}(w_1)$ e $\mathrm{Span}(w_2)$. Una isometria T deve mandare vettori isotropi in vettori isotropi, quindi preserva o scambia le due rette. Se le preserva, queste sono assi per T e quindi T è diagonalizzabile. Se le scambia, nella base w_1, w_2 si scrive come

$$M = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}.$$

Come sopra $^{t}MAM = A$ implica che $cd = 1$ e quindi questa matrice è diagonalizzabile perché ha due autovalori reali distinti $\pm\sqrt{cd}$.